南九州大学研究報告 第51巻：16－24（2021）

小学校における図形の面積指導についての考察
－台形と面積測定の歴史と学生への調査結果から考える－

趙　雪梅

南九州大学　人間発達学部　子ども教育学科
〒885-0035 宮崎県都城市立野町3764-1

A study on teaching area of plane figures in elementary schools
– Perspectives on the history of trapezoid and measuring area and the findings from a survey of students –

Xuemei Zhao

Faculty of Human Development, Minami Kyushu University,
3764-1 Tateno, Miyakonojo, Miyazaki 885-0035, Japan

According to our investigation on the area of the trapezoid of elementary and junior high schools for university students, almost all of them remember the formula but half of them know how to derive it, and 30% have no answer. Moreover, almost all of the students who derived the area formula used the way of "making a parallelogram". The students who remember the way to derive the formula can do it. But if not, there is a possibility that they have no idea to handle it. In order to determine the area of a polygon, even though there is a common approach of "dividing it into triangles to determine", none of those polled students can execute it. Therefore, it became clear that there is a problem in the establishment of mathematical methods and thinking in the learning of the area. Meanwhile, the way of the area guidance in the elementary school was examined in this paper. Under the idea of identifying the historical development of area calculation with children's understanding, we constructed a systematic and indispensable learning of area. While following the textbooks, a method of integrating the nature of shapes and the concept of area through mathematical activities with rectangles, right triangles, and right-angled trapezoid as cores was considered in this paper.

Key words: area, systematic and indispensable learning, mathematical activities

はじめに

学校における算数や数学の教育の一つの課題は，数の計算に比べて図形の分野が不得意ということである．これまでたびたび指摘されてきたところであるが，とくに，図形の論証や公式を導くこと，またそれを活用することに苦手感が見られる．実際，標本数は少ないが，大学生の調査からもこの傾向が見える[註1]．

義務教育段階での図形の指導では，図形の性質はその量的な側面と不可分である．量としては，長さ，角度，面積などがあげられる．ここでは面積について小中学校における系統的な指導の１つの事例を提案して，図形指導の在り方について考察する．本論文では台形の面積を中心に取り上げる．その理由の１つは，2002年から施行された学習指導要領において台形の面積の扱いが小学校から中学校へと移行し，その後再び小学校５年生へと戻るということが起きたことである．それは算数科における図形指導の在り方に深く関わる出来事であった．そのことだけでなく，この時の学習指導要領改訂は大きな問題になったようだ．当時の算数科の学習指導要領改訂の持つ問題点は『科学』（岩波書店）に掲載された黒木の論文[1]に詳しい．小学校５年生での指導内容であった台形の面積が中学に移行した理由は，小学生には難しいというのが理由だった．しかし，算数科で学習する内容は難易によって判断されるものではないと考えられる．黒木は別の論文で小学校において台形面積の指導が必要である理由を学習内容の系統性の観点から指摘をしている[2]．

台形に注目するもう１つの理由は，台形の面積は古代文明において非常に重要な役割を持っていたという点である．このことを古代文明における畑の測量という点から明らかにし，台形の面積へと至る授業プランを提案すると同時に，台形に関する調査[註1]から明らか

*連絡著者：E-mail: chou@nankyudai.ac.jp

になった課題について論究する．ただし，本論文では小学校を中心に取り上げる．

台形と面積測定の歴史的考察

図形の面積を計算することは歴史の古い時代から重要であった．それは土地の測量や建築物の設計など多くの実利的な課題への必要性からであった．古代ギリシャの歴史家ヘロドトス（紀元前484 ～ 425年）は僧侶から聞いた話として次のように述べている[3]．その要点は次のようである．『古代エジプトの紀元前1347年に即位したラジメス２世は，住民に等しい面積の正方形の土地を割りあて，その地代（租税）から収入を得た．そのために土地の測量が行われ，さらにはナイル川の氾濫で失われた土地を測量し直し，租税を割り引くことが必要だった．』

これは何も古代エジプトには限らない．古代文明発祥の１つである中国の最も古いとされる紀元前1100年頃の天文数学書「周髀算経」[註2]には，ピタゴラスの定理や円の面積などが述べられている．また，「九章算術」[註3]に魏の劉徽（リュウキ）が注釈をつけた『九章算術註』（263年）が広く普及し，そこには三角形をはじめ，長方形，台形，円，弓形，扇形などの基本的図形の面積の計算がある．また，城壁，堤防，運河，その他の建造物の体積も計算されている．

この論文では，古代文明の１つであるメソポタミア文明のバビロニアから出土した粘土板に記された畑の図面から，当時の面積計算について考察を進める．それはこの粘土板には数値的データの記述があり当時の面積計算を知る手掛かりとなるからである．この粘土板の図は，小林登志子著「シュメル - 人類最古の文明」の216ページに記載されているものである[4]．この図面は，今から約4000年位遡るウル第３王朝時代（紀元前2112-2004年）のものである．同氏によれば，これも租税のために必要であり，当時すでに書記を養成する学校があり，測量や計算などが教えられていたとある．メソポタミア（現在のイラク）というのは「河の間の土地」というギリシャ語である．メソポタミアは北部と南部に分かれ，北部をアッシリア，南部をバビロニアと呼んだ．南部のバビロニアは両河の泥土が堆積してできた土地であるが洪水にも悩まされたようだ．したがって，その度に土地を測量し直す必要があり，測量術と面積計算が発達した．余談だが，後世になり洪水による上流からの塩分が堆積し穀物が育たなくなり廃れたという．**図1**は粘土板に示された畑の面積図である．

これをもとに，バビロニアの当時の面積計算を振り返ってみる．当時は楔形の文字や数字であり，数は60進数であった（小林の書では，この図面にあるように現在の数値に直してある）．この図でわかるように，まず広い畑をいくつかの長方形で区切って，残りの三角形と台形に分けている．この３つの図形が畑の面積を計算するための基本的図形であったことがわかる．特に，それは直角三角形と２つの角が直角である特殊台形（直角台形）である．

当時の人々は，直角三角形と直角台形の面積を求めることができた[5]．ただ，この畑の図（**図1**）には計算の結果しか示されてないので，その過程は不明である．また，GANという面積の単位だと思われる用語が出てくる．ただ，バビロニアの面積単位について調べたが，このような表記の単位を見つけることができなかった[註4]．ゆえに，この論文では広さの単位の１つだと考えて推論を進めることにする．

まず，現在使っている面積公式を使って考察する（**図1B**）．

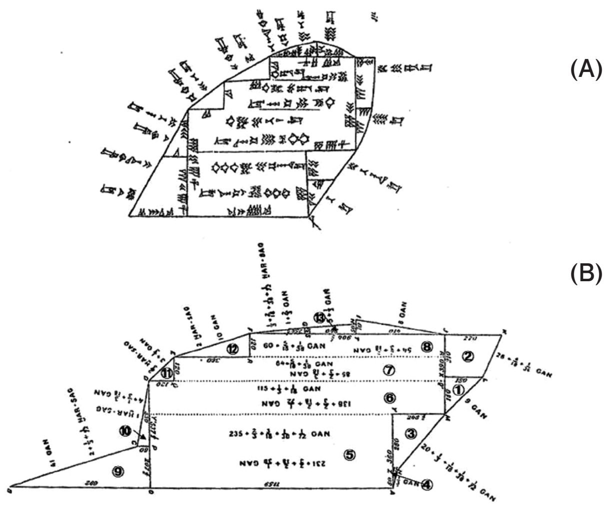
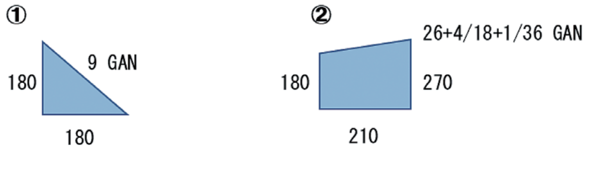


図1．メソポタミア文明のバビロニアから出土した粘土板に記された畑の面積図．**A**はバビロニア語で記されている．**B**の中の番号は著者が説明の都合上記入したものである．

- 三角形の面積の公式は，（底辺×高さ）÷2である．
- 長方形の面積は，底辺（横）× 高さ（縦）である．
- 台形の面積は，｛（上底+下底）×高さ｝÷2である．

実際に，これらの公式を使ってこの畑に記された数値で計算する．**図1B**の中の①の三角形の面積の計算と②の台形の面積の計算は正しいと考えられる．その理由は以下の通りである．



①は

$$180 \times 180 \div 2 = 16200$$

これを9GAN としているので，

$$16200 = 9\mathrm{GAN}$$

より，1GAN=1800であると推定する．

また，②を台形の公式より求める．

$$\{(270+180) \times 210\} \div 2 = 47250$$

これを(26+4/18+1/36)GANとしているので，1GAN=1800として計算すると，

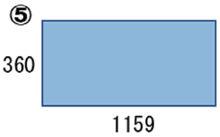
$$(26+4/18+1/36)\mathrm{GAN} = (26+4/18+1/36) \times 1800$$
$$= 46800+400+50 = 47250$$

こうして，1GAN=1800とすると，①と②の面積は公式通りの計算と一致する．したがって，1GAN=1800とし

て，他の部分を計算してみる．長方形⑤(**図1B**)の計算を公式で計算すると

1159×360=417240

(231+2/3+2/18+1/36)GAN
(235+2/3+2/18+1/36+1/72)GAN



長方形の中に2通りの測量値が書かれているが，その中の

(231+2/3+2/18+1/36)GAN

を採用すると，1GAN=1800として，

(231+2/3+2/18+1/36)×1800=415800+1200+200+50
=417250

これは公式から計算した結果と近いが少々異なっている．

もう1つの数値はさらに大きくなっている．この2通りの数値が書かれている理由はわからないが，広い面積を測量なので，長方形の畑の下側と上側から別々のグループがそれぞれに測定して計算した結果なのか，それとも2回の測定の結果なのかは不明である．

当時は正方形や長方形を基に計測したと言われており[6]，現在の面積公式ではなく，実測的な方法を使って求めたのではないかと考える．

ただ，バビロニアの紀元前1600年頃のハンムラビ王朝時代に作られたと言われる粘土板には「長さと幅を掛けると面積になる」とあり[7]，この時代には正方形や長方形の面積の求め方は知られていたのかも知れないが，**図1**の粘土板はもっと古い時代なので，それは確立されていなかったと考えることができる．

それはどの長方形の面積も今日の公式の計算から求めた数値と違っていることや2通りの数値が記されていることからも想像される．もし公式が確立していれば計算された結果が同じでなければならないからである．ただし，他の部分の長方形の面積計算に関しても，2つの数値の中で面積公式からの計算値に近い方を採用すると，25以上異なるものはなく，1GANの25/1800=1/72 以下の範囲に収まっている．今から4000年も前の古い時代に十分精密な測定と面積計算が行われていたのには驚く．

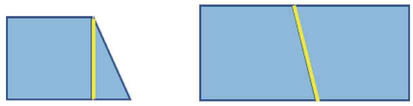
なお，この**図1**のそれ以外の番号に対応する部分の面積と対応する現在の面積公式から計算した結果を巻末に載せておく[註5]．

このバビロニアにおける畑の面積計算からわかることは次のようなことである．

(1)測定したい畑をできるだけ大きないくつかの長方形で覆う(内接させる)

(2)長方形で覆った残りの部分を，長方形の外の辺に沿って直角三角形と直角台形でうまく覆う(内接させる)

何らかの方法で長方形の面積の計算が出来たとすれば，直角三角形の面積は長方形の半分であり，直角台形ついては長方形と直角三角形に分割できるので，それぞれを計算して足しておけばよい．直角台形の面積については別の方法もある．この台形は長方形を切断した形なので，この台形を2つ組み合わせて長方形を作り，長方形の面積の半分として計算できる．ただ，当時の人々がどのように計算したかはわからない．



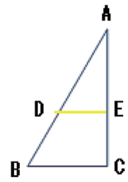
結果的には，長方形の面積さえわかればよいので面積計算の公式は不要である．当時の人々が，(1)と(2)の方法を編み出した背景にはこのことがあったと推測する．

長方形や直角三角形以外に畑の面積を測定して計算が出来たのはこの直角台形であり，それが重要な測定のポイントだったと考える．実際，バビロニアの粘土板の数学記録には直角台形に関するものが非常に多いので[8]，この直角三角形と直角台形を利用する方法は，土地を測量するための優れた知恵だったと推測する．実は，バビロニアに限らず古代エジプトにおいても，直角三角形と直角台形がよく出てくる[9]．それは冒頭でも触れたように，古代の文明が栄えた土地では国家が形成され，灌漑や建設や農耕が盛んになったという政治的で経済的事情があり，(1)と(2)に述べた方法による土地の測定法とそこでの正方形，長方形以外のこの2つの図形の使用は古代文明人たちが到達した共通した知恵だったと推測する．

古代エジプトでは直角台形を切頂三角形と呼んでいる[10]．この言葉から推測するに，畑の広さを計測するのに，正方形や長方形で測定して，次に直角三角形で測定し，それでもはみ出す部分を直角三角形の頭の部分を底辺の平行に切り取ったもので測定したので，必然的に直角台形が生まれてきたのではないだろうか．

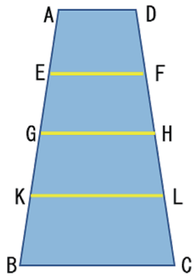
実際，バビロニアの粘土板や古代エジプトのアーメス・パピルス[註6]には，直角台形を底辺に平行な直線で切った部分の長さや面積を求める問題が多くある．このことをみても，直角台形(切頭三角形)は実用的で重要な図形であったことが示されている．

右の例はバビロニアのものである[11]．ΔADEの面積が270，BC=30，AE－EC=10．この時，台形DBCE の面積を求めよ．



この問題を解くには，相似比や二次方程式の解き方の知識が必要なのだが，驚くことには，バビロニアでは相似比や二次方程式の解き方が知られていたことがわかっている．時代は変わっても，測量では正方形や長方形以外の四角形では，台形が重要だったことがわかる．それは，次の問題は台形の面積に関するインド(850年)のものであり，中国でも同様の問題が見られる[12]．

等脚台形ABCDの畑がある．
AD=18, BC=162, AB=DC=400
この畑を上から面積比1:2:3:4となるように分割する．
1) それぞれの面積を求めよ．
2) EF, GH, KL の長さを求めよ．
3) AE, EG, GK, KB を求めよ．



ただ，一般の台形の面積の正しい求め方が，いつの時代に広く知られるようになったのかは十分にわかっていない．バビロニアや古代エジプト時代の一般四角形の面積を求める式は，対辺の長さ平均値をとって，その2つを掛け合わせたものであった．一般の三角形でもこれを適用していたようだ（1つの辺の長さを0とすればよい）．もちろん，これは長方形や正方形ではこの方法は正しい．実は，後世においても，長い間この方法を台形の面積に適用していたと思われる事実がある．

ロシアでは，1629年に書かれたとする写本における台形の面積の求め方は，上底と下底の平均値に斜辺の長さを掛けたものだとされている[13]．この時，適用されるのは等脚台形が多かったようである．等脚台形は斜辺の平均は斜辺自身であるから，上底と下底の平均値に斜辺を掛けるのは上記の一般の四角形の求め方を適用した例である．これは決してロシアに限ったことではないと思われる．

このような経緯を経て，今日の一般的な台形の面積公式に行き着くのであるが，土地の分割を一般の四角形にしないのは，実用上のこと以外に面積計算という面が大きかったと推測する．平行四辺形は長方形と同じように面積計算は簡単だが，平行四辺形の扱いが確立するのは中世の終わり[14]というから，その扱いは一般的ではなかったと考える．一般的な台形の面積の正確な求め方が広く知られるには時間がかかったことを考えるならば，古代文明人の考えた直角台形による面積の計測という方法は秀でた知恵であったといえる．

学びは文化の継承でもある．先人の知恵を取り込んだ学習は，児童にとって価値のある興味の持てる内容になると考える．以降，古代人になったつもりで考える台形の面積計算にいたる学習指導プランを提案する．

小学校における図形の面積指導についての提案

日本における台形の面積指導は小学校の5年生に出てくる．はじめに，この単元における新学習指導要領は次のようである[15]．

『平面図形の面積に関わる数学的活動を通して，次の事項を身に着けることが出来るように指導する．

ア．次のような知識及び技能を身に付けること．

㈠三角形，平行四辺形，ひし形，台形の面積の計算による求め方について理解すること．

イ．次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること．

㈠図形を構成する要素などに着目して，基本図形の面積の求め方を見出すとともに，その表現を振り返り，簡潔かつ的確な表現に高め，公式として導くこと．』

この学習指導要領の下で作られている教科書[16]の台形面積に関しては，一般の台形が出てきて，台形の面積の公式を導き，そのあと練習問題を解くという流れである．

ところが，台形の面積に関する今回の調査から明らかになったことは次のことである．

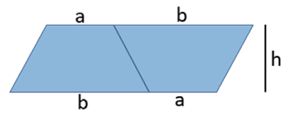
- 具体的な数値を与えた台形に面積の計算はほぼ全員できる．
- したがって，当然のことだが台形の面積公式もほぼ全員が知っていた．

このことは，学習指導要領が述べている知識や技能，公式を使う能力をほぼ全員が持っていることを示している．しかし，これで面積学習の狙いは達成できたのかというと，それは大いに疑問である．なぜならば，“公式を導きなさい”という課題に対する調査結果が次のようになっているからである．

- ほぼ全員が公式を知っているにもかかわらず，それを誘導できた者は約半数であり，しかもそれは典型的な1つの方法によるものが圧倒的であった．その一方で，約30%が無解答であった．

その典型的な導き方とは，与えられた台形と同じものを補充して平行四辺形にして，平行四辺形の面積の半分であるとする考えである．

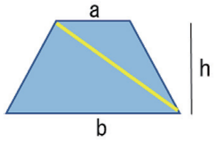
導き方1：平行四辺形を作る方法



$$S = \frac{1}{2}h(a+b)$$

この方法を発想するのは決して易しいとはいえない．ただ，どこかで学習していればイメージ化しやすい利点がある．したがって，この典型的な導き方を覚えていればいいが，忘れたら終わりである．一方で，面積を求める手続きに関するスタンダードな方法がある．それは系統的な数学的思考方法の1つであり，次のように三角形に分割する方法である．

導き方2：三角形に分割する方法



$$S = \frac{1}{2}ha + \frac{1}{2}hb = \frac{1}{2}h(a+b)$$

したがって，「**導き方1**」の典型的な方法を思い出せなくても，「**導き方2**」の面積に関する系統的学習が修得されていれば可能である．これらはすべて日本の小学校の教科書に載っている方法である．

この調査結果が明らかにしたのはこの後者に関する問題である．

実際には，台形の面積の公式を導く方法はいくらで

もある．面積の学習に限らず大切なことは再生的な思考である．暗記することではなく，いつでも再生できる思考を身に付けることが重要である．つまり，身に付けるべきことは，数学の方法や思想であり，算数的思考や数学的思考である．

公式を適用して，いくら練習問題を解ことができても，その背景にある数学的思考が獲得されているとは限らない．以上のことも踏まえた新たな提案の概要と要点を述べる．まず，次のような活動的な学習を導入する．

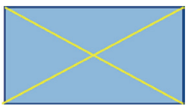
学習1：正方形，長方形に対角線を引くと 2 個の三角形ができるが，それは同じ形をした三角形であることを確認する．折るなり（正方形），切るなり（長方形）して，2 個が重なることから確かめる．そして，その三角形の命名（直角三角形）と定義の指導をする．

この直角三角形の面積と正方形または長方形の面積の関係は，半分であることを知る．

学習2：長方形を使った活動を通して等しい面積を探す課題に挑戦する．直角三角形がキーになる（**課題1**，**課題2**は数値計算ではなく，図形そのものから考える活動である）．

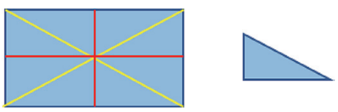
課題1：長方形を 2 つの対角線で分けると 4 つの三角形ができる．この 4 つの三角形で面積が同じものはどれかを選ばせ，その理由も考えさせる．

ヒント：対角線の交点を通って，切り取って重ねてもよい．



対角線の交点を通り外枠の辺に平行な直線を引く（折ってもよい）．4 つの長方形ができる．

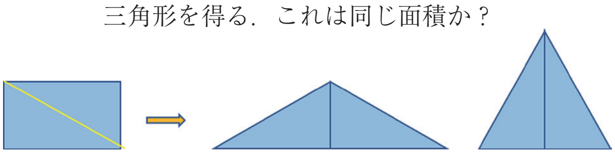
ここでできる新たな直角三角形に注目する．直角三角形と長方形との関係を使う．



新たにできたすべての直角三角形は同じ面積であり，上記のどの三角形もその個数は 2 個であるから等しくなる．直角三角形による測定である．

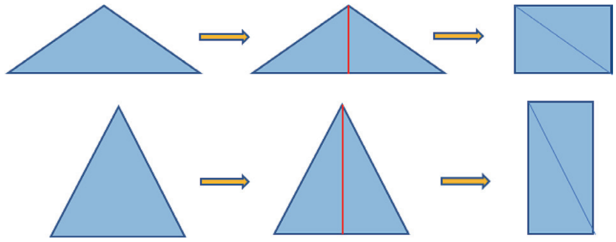
以上は，あくまで図形そのものから考え，直角三角形がその測定の道具になる．

課題2：長方形を対角線で切ると 2 個の直角三角形ができるが，これを合わせて 1 つの三角形を作る活動である．結果としては 2 通りの二等辺三角形を得る．これは同じ面積か？



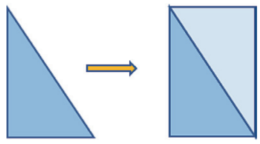
課題3：課題 2 の逆の作業である．二等辺三角形を与えて，これを分割して長方形を作る．

垂線（対称軸）を考える必然性が出てくる．



学習3：直角三角形のみを与えて，それを用いて長方形を作る．**学習1**と逆の活動を行う．

同じ形の直角三角形を補充して長方形を作る．



以上では，数値は全く出て来ない．図形の性質そのものからの考察である．数値計算ではなく，まず図形そのものから考察する．これが図形の学習では大切である．

これらの活動から合同な図形は面積が等しいということや等積変形（面積を変えない変形）を感覚的につかみ，さらにどの図形が計算の基礎になるかを見極める．

学習4：ここで改めて，具体的な正方形や長方形の長さを与えて，これらの三角形の面積を計算する．

「**学習1**」から「**学習4**」までに示されている数学的な考え方は次のようにまとめられる．

(a)基本としては，長方形の面積は 2 辺を知れば「横 × 縦」で計算できること

(b)長方形の 1 本の対角線によって分割された 1 つの直角三角形の面積はその長方形の面積の半分であること

(c)直角三角形から長方形を作ったり，長方形から直角三角形や二等辺三角形を作ったりする活動（図形の活動）を通して，直角三角形や二等辺三角形の面積と長方形の面積との関係がわかることから，長方形との関係において直角三角形が便利なことを知る．数値計算はその後で行う．

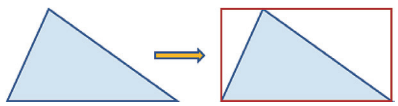
次に，一般の三角形の面積の考察に進む．

学習5：長方形の中に一般三角形を書いたものを考える．このとき，この三角形の面積と長方形の面積の関係を調べる．

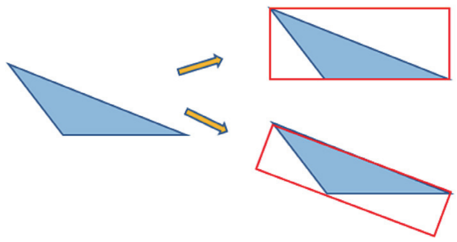
この逆問題を考える．

三角形が与えられたときに，それに外接する長方形を作る場合（長方形の 1 つの辺はこの三角形 1 つの辺を共有し，残りの三角形の頂点は対辺上にあるものとする），以下の 2 つのケースが存在する．

①三角形の頂点が底辺の範囲にある（鋭角三角形）



②三角形の頂点が底辺の範囲からはみ出す
（鈍角三角形）



面積の指導において，高さが理解できない児童がいることがたびたび指摘されてきた．この活動から高さとはその三角形を囲む長方形の辺なのであり，これにより高さの意味と必然性がわかる．また，そのことによって，どの辺が底辺となってもそれを囲む長方形をつくることで，高さがどれであるかがわかるようになる．

教科書では平行四辺形に移るのであるが，その前に次のような応用課題を考える．

学習6: 長方形を直線で切りわけたときにできる図形の面積を考える．

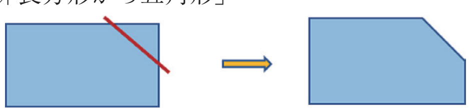
長方形の畑に道が通る場合，どのような形の畑が出現するかを考える．つまり，切り取った形の面積の計算方法を考える（図形から考える）．また，そのために必要な数値情報は何かを考え，測定して計算する．紙面の都合上，後の台形の面積に繋がる畑を斜めに横切る場合について取り上げてみる．その中の2つのケースを見てみよう．

①「長方形から直角台形」

この場合は，直角台形が出てくる．

この面積を求める方法としては，「長方形＋直角三角形」がある．それ以外の方法も扱う．ここで，同じ直角台形を2つ合わせて長方形を作り，その半分であることなどを扱う．

②「長方形から五角形」



この面積を求める方法として，直角台形を使うことを考える．「長方形＋直角台形」がある．その他の方法も扱う．

学習7: 以上を踏まえた紙面上の土地測量の活動を導入する（省略）．

活動には長方形，直角三角形，直角台形を測定の道具として使う．

学習8: 平行四辺形の求積についても教科書の方法に加えて直角三角形や直角台形を使うことができる（省略）．

学習9: 一般台形の求積

「**学習5**」から「**学習9**」までの活動で面積の求め方について学習しており，まずは児童自らの求積方法を考えさせる．

①まず図形から考える．

これまでの活動からどうしたら面積が求まるかを考える．数値を与えて，実際の面積計算をする．

②三角形の分割と平行四辺形による方法を知る．

平行四辺形による方法はそれをカットしたときの形が台形であるが，面積を計算するために同じものを2つ合体すれば平行四辺形ができるという逆の発想はやさしくはない．その伏線は(3)と(6)であるが，児童自らが発見するのは難しいかもしれない．そこに算数を学ぶ理由がある．生活経験や体験からすぐに発想できるのであれば，学校で学習する必然性はない．学校で学ぶことは算数･数学の方法や思考である．

学習10: 一般台形の面積公式を導く．

いろんな求め方はあるが，それを公式とするにはどうしたらよいかを考える．

以上が新たな学習プランの概要である．このプランの展開が歴史的順序と合致しているものである．すでに論述したように，古代においては，土地の測量という必要に迫られて面積計算が可能な小道具として，直角三角形や直角台形が重要な位置を占めていた．一般の三角形や台形の面積の面積についての面積公式が得られたのはその後のことである．この歴史的順序はその必要性と認識という観点から算数を学習する上で重要である．以下にそのポイントを述べる．

ポイント1: 「長方形から直角三角形から直角台形」という流れは，長方形の面積公式を知っていればよいので，児童全員で無理なく共有できる．

ポイント2: 直角台形は長方形と直角三角形の面積から簡単に面積がわかる図形であり，一般の台形や平行四辺形に行く前に面積を知ることより，わかりやすい図形である．

ポイント3: 粘土板にあるような土地の測量という活動（机上の活動でもよい）を通して，基本的な3つの図形の実効性を確かめることができる．

教科書の面積指導は[17]，長方形，三角形，平行四辺形，台形の公式を導き，練習問題をするという流れであるが，ここで提起するのは特殊な三角形と特殊な台形の面積をコアにして一般的な公式へと向かう流れである．黒木は教科書の流れによる平行四辺形を使う方法は唐突だと指摘しており，多角形の敷き詰めという別の観点からこの方法へと繋ぐ流れを提案している[18]．

この論文で提案したプランはそれとも異なる．上に

述べた歴史的な観点を取り込んだ台形の面積に至る新たな流れである．教科書の流れに沿いながらも，数学的活動を通して図形の性質と面積の概念とを総合していく方法である．この方法は著者が開発研究を続けているNarrative Mathematics Learning[19]に関連する．公式を知りそれを適用することだけならば教科書の流れで十分である．しかし，公式に至る過程が重要であり，それは背景にある数学的な方法や思考を学ぶことである．そのために，面積の歴史的考察をもとに学習を作り，児童の試行的な活動をもとに興味を持って主体的に取り組めるプランを提案するものである．

おわりに

すでに文中でも述べたが，今回の調査から明らかになったことは次のことであった．

小学校の算数の図形の問題に対して

⑴ほぼ全員が台形の面積公式は覚えているが，それを導くことが出来ない者が半数いること

⑵公式を導く段階でも極端に分かれていて，公式を導けた者のほぼ全員が「平行四辺形を作る」という方法であったこと

以上から言えることは，導き方を覚えていればできるが，そうでないと全く手をつけられない傾向が見られたことである．解答できなかった者が全体の30%を占めた．多角形の面積を求めるためには「三角形分割して求める」という普遍的な原理があるにも関わらず，それを実行できた者は1人もいなかった．このことから面積の学習における基本的で系統的な学習の定着や数学的方法や考え方の習得に課題があることがわかった．

多角形の面積を求める数学的思想とは何か．それは次のボヤイ･ケルビンの定理である[20]．

定理：等積な二つの多角形は分解合同である．

系：　⑴任意の多角形はある長方形と分解合同（＊1）である．

⑵任意の多角形はある長方形と補充合同（＊2）である．

（＊1）多角形AとBが分解合同とは，Aを有限個の多角形の図形に切り，それを適当に貼り合わせるとBが出来ること（裏返しも許す）．

（＊2）多角形AとBが補充合同とは，AとBに互いに合同な図形を貼り合わせる操作を有限回行うとA，Bを合同に出来ること．

この定理の意味は，もともと面積の基本は長方形（および正方形）にあり，どんな多角形も切り貼りすれば長方形になるということである．この数学的事実は，長方形を分割して，直観的に面積の求まる直角三角形やそれを組み合わさった直角台形が使われたことの正当性でもあるし，長方形との関連を意識することの重要性を示唆している．したがって，面積学習の背景にあるこのような数学的思想を踏まえた学習における系統性と必然性のある学習どのように作るのかということが課題であり，そのための学習プランを提案した．

台形の面積に注目した理由は冒頭で触れた通りであるが，黒田の文献[21]は次のようなことが述べられている．「小学校や中学校で扱う数学はその過程において社会と密接な関係の下で発達した．その発達の歴史性は個体発生とも共通な部分が多い．従って，数学を完成された固定的なものと見るのではなく，人類の社会の中で発展してきたものであるという観点が必要である」．これは，数学の発展史と児童の成長発達とを重ねわせて考えることの重要性を訴えているものある．本論文では，黒田の考えに従い，面積計算の歴史的発展を児童の理解と重ねて考えていくという視点を取り入れた系統性と必然性のある学習の提案を試みたのである．

著者はこれまでチャレンジ算数教室という公開講座を通して学習方法と学習内容の新たな構築に向けて取り組んできた[22]．それは協働の学びを通して，児童を支援する方法であり，その根幹にあるのがNarrative mathematics activityである．その手法はこれからの教員養成に必要だと考えており，今回の提案をその実践に相応しい形にプランニングしていく予定である．

摘要

大学生を対象に小中学校の台形の面積に関する調査を行った．その結果，ほぼ全員が台形の面積公式を覚えているがそれを導けた者は半数であり，約30%が解答できなかった．また，面積公式を導けた者のほぼ全員が「同じ台形を2個合わせて平行四辺形を作る」というただ1つの典型的な方法であった．公式の導き方を覚えていればできるが，そうでないと全く手をつけられないという傾向が見られた．多角形の面積を求めるためには「三角形に分割して求める」という普遍的な方法があるにも関わらず，それを実行できた者は1人もおらず，面積の学習における数学的手法や考え方の定着に課題があることが明らかになった．そこで，小学校における面積指導の在り方を検討することとした．ここでは，面積計算の歴史的発展を児童の理解と重ねて考えていくという視点を取り入れた系統性と必然性のある学習の構築を志向した．教科書の流れに沿いながらも，長方形，直角三角形，直角台形をコアにした算数的活動を通して，図形の性質と面積の概念とを総合していく方法を考えた．

引用文献･参考文献

1）　黒木哲徳（2001）算数，数学の教育の時間と内容はこれだけでいいのか．理科･数学教育の危機と再生（左巻健男,苅谷剛彦編），pp.20-30，岩波書店，東京

2）　黒木哲徳（2013）図形指導の事例（面積）から考える算数学．『数学リテラシー概念に基づく教員養成系数学カリキュラムの開発』科研費基盤研究（B）研究会誌96-106

3）　D.E.スミス（1944）数学史（今野武雄訳）．p.61，紀元社，東京

4）　小林登志子（2013）シュメル－人類最古の文明．

p.216，中公新書，東京
5）大矢真一（1947）比較数学史．p.220，富士短期大学出版部，東京
6）Γ.N.グレイゼル（1997）グレイゼルの数学史（Ⅱ）（保坂秀正，山崎昇訳．p.35，大竹書店，名古屋
7）武藤徹（2012）面積の発見．岩波科学ライブラリー，岩波書店，東京
8）大矢真一（1947）比較数学史．p.222，富士短期大学出版部，東京
9）大矢真一（1947）比較数学史．p.111，富士短期大学出版部，東京
10）T.L.ヒース（1998）復刻版 ギリシア数学史（平田寛，菊池俊彦，大沼正則訳）．p.63，共立出版，東京
11）片野善一郎（1948）問題形式による数学史．p.141，富士短期大学出版部，東京
12）Mahavira（850）Mahavira文集 第７章pp.175-178．歴史数学名題賞析（沈康身（2002））．pp.538-539，上海教育出版，上海
13）Γ.N.グレイゼル（1997）グレイゼルの数学史（Ⅱ）（保坂秀正，山崎昇訳）．p.4，大竹書店，名古屋
14）Γ.N.グレイゼル（1997）グレイゼルの数学史（Ⅱ）（保坂秀正，山崎昇訳）．p.34，大竹書店，名古屋
15）文部科学省（2018）小学校学習指導要領（平成29年告示）解説　算数編．p.256，日本文教出版，東京
16）清水静海・根上生也・寺垣内政ほか120名（2019）わくわく算数５（平成26年検定済）．啓林館，東京
17）清水静海・根上生也・寺垣内政ほか120名（2019）わくわく算数４ 下（平成26年検定済）．啓林館，東京
19）趙雪梅（2019）Narrative Mathematics Learning – 子どもの深い学びと学生の実践力向上をめざして -．数学文化第32号: 106-117，日本評論社
20）ヴェ・ゲ・ボルチャンスキー，ア・エム・ロプシッツ（1994）面積と体積（木村君男，銀林浩，筒井孝胤訳）．東京図書，東京
21）黒田孝郎（1958）学校教育と数学教育．数学教育の実践（黒田孝郎編），pp.22-23，国土社，東京
22）趙雪梅（2019）チャレンジ算数教室を通した深い学びを目指して．数学教育2019年９月号: 102-105，明治図書，東京

注記

（註1） 調査問題と結果

台形の面積に関する問題４題を出題した．

対象：45名（大学生）

調査問題：

1. 上底が3cm，下底が4cm，高さが6cmの台形の面積を求めなさい．
2. 上底がa cm，下底がb cm，高さがh cmの台形の面積Sの公式を述べよ．
   S＝
   この公式を導きなさい．
3. 上底が3cm，下底が4cm，高さが6cmの台形の面積を下底に平行な線分で2等分したとき，その線分の長さは$5/\sqrt{2}$であることを示しなさい．
4. 問題３で求めた台形の面積を２等分する平行な線分の長さは$5/\sqrt{2}$でした．
   そこで，「定木（＝線を引くだけに使う）とコンパス」だけを用いて，その線を引いて，実際に２等分する方法を述べて下さい．（ヒント：「三平方の定理（＝ピタゴラスの定理）」）
   ①「三平方の定理」とはどんな定理ですか．
   ②実際に，面積を２等分する長さ$5/\sqrt{2}$の平行な線分を引く方法について述べなさい．ただし，説明するにあたって，次のことは仮定してよい．
   定木とコンパスだけで，「与えられた直線Lと直線外の点Pに対して，Pを通りLに平行な直線を引く」ことができる．また，1cmの長さは与えられているものとする．

表1．台形の面積に関する調査結果

番号	評価内容	正答（人）	無回答（人）
問題1	台形の面積	43	0
問題2	台形の面積公式	43	0
	台形の面積公式の誘導	23	17
問題3	台形の中線の長さ	1	15
問題4	ピタゴラスの定理	21	14
	台形の中線の長さの作図	0	38

調査数：45人

表2．苦手意識調査結果

項目	人数	割合
図形が苦手とする者	18	40%
証明が苦手とする者	24	53%

調査数：45人

（註2） 中国最古の天文数学書（上下２巻）で，後漢の頃に編纂されたと言われている．

（註3） 中国最古の算術書で，紀元前1000年以前に編纂されたものと言われているが，著者や年代は不明．

（註4） 武藤　徹（著）の「面積の発見」（岩波科学ライブラリー，2012）には，バビロニアの単位について次のようにある（要約）．

①都市国家カッシート時代（紀元前1746-1173）：

大麦180粒を撒く畑の面積が1シュケル，1シュケル= 1ギン=0.6㎡，1ギン= 180セ，大麦１粒を撒く広さが「セ」で，セは6㎠．**（図1）**のウル王朝はさらに古い時代だが，このカッシート時代から推測すれば，10ギン= 1800セとなり，10ギン= 1GANとすれば，1GAN = 1800となるが，この推測が正しいかどうかはいまのところわからない．

②ハンムラビ王朝の後期（紀元前16世紀）の粘土板：

「長さと幅をかけると面積になる」とあり，この時代の面積単位は「サル」，1サル= 1ニンダ（約6m）の正

方形の広さ＝36㎡.

(註5) 畑の面積の計算（1GAN=1800 として計算）

表3. メソポタミア文明のバビロニアから出土した粘土板に記された畑の面積

番号	形	図面からの結果	現在の面積公式からの結果	備考
③	台形	36,775	36,890	違いは115（他に比べて大きい）
④	三角形	600	600	一致する
⑥	長方形	207,700	207,675	違いは25
⑦	長方形	151,750	151,740	違いは10
⑧※	長方形	108,540	108,550	違いは10
⑨	台形	78025+4227	78,020	一致する
⑩	三角形	8100+1800	9,900	一致する
⑪	三角形	6000+1200	7,200	一致する
⑫	三角形	18000+3600	21,600	一致する
⑬	三角形	9,600	9,600	一致する

※図の左側では，GAN以外にHAR-SAQというのが出てくる．これも1800として，2つの数値を加えて計算すると公式から計算した結果と一致する．

(註6) アーメス･パピルス

紀元前1650年頃の写本，原本は紀元前1849-1801年の古代エジプトのアメネムヘト第３世の頃のものとされる．古代エジプトで知られていた数学の集大成．分数や面積･体積など測量術に関する計算などが書かれている．長方形の面積が辺の積であることも書かれている．（英国の学者リンドが発見したのでリンド･パピルスともいう）．