数学科における小中連携の事例についての考察

趙　雪梅

A Study of One Case in Mathematics Education for Bridging the Gap between Elementary School and Junior High School

Xuemei Zhaoi

キーワード：中１ギャップ　小中連携　算数と数学の繋ぎ　鶴亀算

要約：近年、中１ギャップに関する要因や解消が問題視されるようになってきた。この背景を受け、本論文では算数・数学教育における小中の繋ぎのために、学習指導要領から繋ぎになるポイントを分析し、１つの例とする鶴亀算を用いて、算数的な解法から代数的な解法の変化による学習の繋ぎが出来るような在り方を検討した。

１．はじめに

文部科学省（2011）によると、平成22年度に「不登校」を理由として年間30日以上欠席した児童生徒数は３年間連続減少したが、中学１年生における不登校生徒数は、2008年と同じように、小学６年生の不登校児童数より飛躍的に増え、３倍になった。その１つの要因は中１ギャップだと考えられる。

中１ギャップとは、小学校から中学校に入学した１年生が、大きな段差や壁を感じとり、中学校生活にとけ込めない状態をいう（児島・佐野，2006）。中１ギャップ解消をめぐって、児童生徒を対象として、移行に伴う感情の変化（Ingraham, 1988）や環境変化の適応感（小泉，2010）などの側面から研究し、小・中学校の教員を対象として、中１ギャップの要因（富家・宮前，2009）を調査した。調査の結果によると、学力格差、教科内容の難易、授業の進度や学習習慣の違いなどが乗り越え難い要因となっている。また、児島・佐野（2006）は、中学校教員であれば、最近の１年生は漢字の読み、書き、あるいは計算力が落ちていることを体験的に理解しており、こうした実態に適切に対応しきれていない状況も中１ギャップの背景になると述べている。義務教育において、国語とともに、算数・数学の学習は基礎学力を身につける教科であるが、とりわけ、小学校の算数から中学校の数学への変化による不適応は、落ちこぼれと数学嫌いをきたしやすいと考える。本研究では、算数と数学の繋ぎに注目し、中１ギャップの解消について考え、そのあり方を検討する。

２．学習指導要領から繋ぎを考察

中学校新学習指導要領解説数学編によって、知識基盤社会化やグローバル化およびOECDのPISA調査など各種の調査から挙げてきた課題に直面し、算数科・数学科については、小・中・高等学校を通じて、発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにするという基本方針が示されている（文部科学省，2008）。その中に、基礎的・基本的な知識・技能は数量や図形におけるものだが、それらを確実に定着するために、算数・数学内容の系統性を重視し、学年間や学校段階間でのカリキュラムをスパイラル的に構造するべきであると述べている。

代数と幾何は学校算数・数学教育での重要な２つの柱である。この幅広い内容を、新学習指導要領では、小学校算数が「数と計算」、「量と測定」、「図形」、「数量関係」の４領域に分け、中学校数学が「数と式」、「図形」、「関数」、「資料の活用」の４領域に分けている。本研究をは代数を巡っ

て、小学校と中学校の繋ぎが出来るような在り方を考える。

数の性質および数の計算は代数の１つの研究分野である。数の概念ははるか昔からあった。特に自然数の形成は先史時代であった。ただし、19世紀後期になるまでは、数の体系に関わる理論ががっちりと組み立てられていなかった。数千年をかけて出来あがった数の体系は、学校数学教育の重要な学習内容である。

領域別系統図（黒木哲徳，2009）によると、小学校６年間の内容が自然数・零・分数および小数であり、中学校の内容が有理数・無理数即ち実数である。図のように、小学校で学習する数には負の有理数はないので、有理数における全体的な概念を構造するには負の数の認識から手をつける。中学校１年に入って、数直線が原点Oから左の方へ伸びることから生徒たちはフレッシュなスタートを体験する。

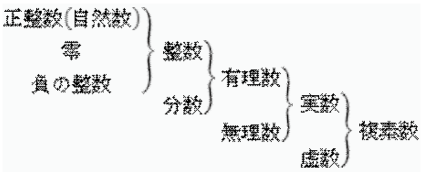

図　数の体系

数の性質を認識するとともに、数の計算における学習も展開している。小学校の算数では、自然数、小数と分数の認識はもとより、20までの加法・減法から始め、整数・分数・小数の四則演算を学ぶ。中学校の代数は、数の認識が深まるとともに、文字式・代数式・方程式の計算も学ぶ。計算は数のみではなく、式に広がる。式の計算は数の個性を取り去って、それを文字、あるいは記号で代用して演算を行うことである。そして、文字あるいは記号で数を表すことが鍵である。

「数と計算」から「数と式」へ移行するときに、「負の数の認識」と「数を文字で表す」は繋ぎになる。しかし、児童生徒は、飴やりんごなどの具体物を数えることから数の概念を作り始めるし、飴やりんごの合わせ、食べ残しや何人に分けることから数の計算を始めるので、抽象的な文字で数を表すことに対して、その取り扱いの理解ができるかどうかが懸念される。ここでついて来なければ、ギャップを出てきて、数学が難しいと思って、次第に数学離れになる可能性が高くなると考える。この壁を乗り越えるために、繋ぎができるような実用的な背景による数学問題を用いて、ギャップ感を解消する事例について考察する。

３．事例の考察

学校数学教育の１つの重要な目標では数学知識・技能を把握し、数学的能力を養成することである。目標をよりよく達成するために、筆者は実用的な背景による数学問題作りを提案し、小説と同じような展開で、生徒の見覚え・書き覚えのあることから背景を選び、問題の筋が生徒の生活経験であったり、温暖化や円高のような社会的な話題であったり、物理・化学・生物・歴史などの教科と関連のある問題だと定義した（趙，2010）。ここで、小６と中１の繋ぎを考えると、生徒たちの読解力・理解力が弱いので、伝統的な算数の応用問題に基づいて、実用的な背景による数学問題を解決するプロセスを通して、算術的な解法から代数的な解法への変化を体験し、文字や記号も抽象的なものを具体化する働きがあることを理解する。

古代においては、生活・農業生産・水利工事に対する必要に応じて、数と計算及び幾何が現れた。日本の和算でも、中国の古算でも、数学の長い歴史の中で、豊富な応用問題を蓄えて、類型をまとめて、様々な古書に記載している。一部が、例えば、植木算、出会い算、鶴亀算、流水算、例題によって現在の教科書にも登場している。鶴亀算は子どもの頭を悩ませる問題だが、小学校の数と中学校の代数の繋ぎの大切な問題ともなる。

「ここに鶴と亀合わせて35頭あり、足数和して94、鶴亀おのおの何ほどか問う。」（岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武他，2006）

以上の問題は17世紀に日本に伝わった中国の「雉兔同籠」という問題からとられている。雉兔同籠は1500年前に、「孫子算経」に記されている。伝えるところによれば、「孫子算経」の著述者の孫子が友達の家に尋ねたときのことから出ているという。友達はたくさん雉と兔を飼っていた。孫

子は雉と兔が何匹ずつ飼っているかと聞いた。友達はふざけ半分に次のように言った。

「わが家で、雉と兔の頭の数が合わせて35頭で、足の数が合わせて94本である。雉と兔其々の数は先生が計算してくれますか？」

孫子が非常に興味を持ち、計算したが、すぐには結果が出てこなかったので、友達と話す気になれず、すぐ帰宅した。その後、孫子は答えが分かったばかりでなく、いくつもの解法を研究した。「仮定解法」という賢い解き方も見つけ、「孫子算経」にまとめた。孫子の賢い解き方は次のようである。

「①　半其足……足の数94を半分する。
②　以頭除足…それから、頭の数35を引く。
③　以足除頭…それを、頭の数から引く。」

孫子は仮に雉と兔の足を半分カットするとしたらとして、答えを求めた。孫子の仮定解法は現代にもよく使われている。雉と兔の代わりに、鶴と亀で考える。かりにすべて鶴（あるいは亀）とし、足の数を計算し、比較してから、２種類の動物のそれぞれの数が分かる。

「①　すべてを鶴と考える35羽
②　鶴の足は35×２＝70本
③　実は94本、その差は94－70＝24本
④　この24本は亀の足となるはず
⑤　亀１匹につき２本必要なので、亀は24÷２=12匹
⑥　鶴は35－12=23羽。」

この仮定解法の以外に、枚挙解法という、もっとシンプルな解き方がある。

表１によって、亀が12匹、鶴が23羽であることが分かる。

仮定解法は論理的な考え方が必要なので、より高い抽象性をもっていて、理解が難しい。枚挙解法は直観的だし、分かりやすいけど、一々挙げなければならないので面倒くさい。算術的な解法はこの２つのみではないが、小学校段階では、この２つがよく使われる。

それから、もう１つ重要な解き方、つまり代数的な解法がある。これは方程式解法である。問題の中に、与えられた条件による未知数との数量関係を分析し、等しい数量関係を見つけ、既知数と未知数の間に等式を立てる。鶴亀算の問題で、２つの量を求めたいので、鶴か亀かどちらかをxとし、もう１つを（35－x）とすると、２種類の動物の足の数を合わせる総数という与えられた条件によって、一元方程式を作る。または、鶴と亀をそれぞれ x，y とすると、与えられた頭の総数と足の総数によって、連立方程式ができる。

鶴亀算における解法は算術的な解法と代数的な解法２つのタイプがある。従って、この問題は小中を繋ぐために、よりよい例となる。筆者の経験によると、２足の鶴と４足の亀の合わせてということに対して、児童は６足で考えるか、２足（つまり４－２＝２）で考えるかを悩んでいた。仮定解法よりむしろ枚挙解法で考えさせるほうがやりやすい。やさしい問題を解くときに、児童は経験や直感で答えを見つけるし、面倒ではあるが、いちいち並べ上げによって答えを明らかにすることができる。それで、鶴亀算で、児童に図や表で、大きい数から小さい数にもしくは小さい数から大きい数に並べ上げてから問題を解くよう指導する。枚挙解法というのは、問題の条件に合うような可能ある答えを逐一並べて、表（例えば表１）のような形で整理し、それによって問題の解を得る。これは操作しやすいので、実用性高いストラテジーである。物事に対する見方は低い水準で足踏みしてはならないので、図や表から出てきた直観的な認識を抽象して、仮定解法で問題を解決する。仮定は１つの重要な数学的な考え方であり、一定の事情や結果を想定し、論証や検証によって、問題を解決する解法である。ここから生徒の論理的な推理能力を養成できる。

中１に入って、「文字で数を表す」と次の「方

亀の数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
鶴の数	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	…
足の総数	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	…

表１

程式」を学習するときに、生徒の理解を促進するために、鶴亀算を示し、算術的な解法を復習しながら、代数的な考えと繋ぐ。例えば、表で一々並べ上げるような枚挙は関数の１つの表現であり、方程式との逆演算関係を持つ。表１に基づいて、与えられた条件をもとに表２に数量関係をまとめてから、方程式を立てる。

	頭の数	足の数
合計	35	94
亀	x	4x
鶴	35－x	2(35－x)

表２

同じ問題で、小学校で学んだ知識を用いて、数から式へ、数の計算から式の計算へ、直感から抽象への柔らかい移行で、より便利な代数の魅力を体験できるし、カリキュラムの系統性に有利であると思う。現行の啓林館の教科書を調べると、小６年算数「変わり方のきまりをみつけて(2)」(清水静海・船越俊介他，2009) という単元で、鶴亀算類型の文章題があり、枚挙解法を主とする指導がある。中２年数学「連立方程式」という単元後の「数学展望台」というコラムで、鶴亀算の歴史的な流れを紹介している。また、教科書の例題や練習問題は鶴亀算と同じような問題が出てくるが、前後の繋ぎを示すことが必要ではないだろうか。未熟な理解力の子どもたちでは、このことを見抜けないと考えるからである。

４．まとめ

本研究の狙いは算数・数学教育における小中の繋ぎのために、系統性を持つ問題づくりの在り方を追求することである。本稿で言及した鶴亀算は説明のための１つの例として用いた。都市化の影響で、現在の児童生徒は、鶴亀でも雉兔でも漫画で見るか、ペットショップあるいは動物園で出会える程度であろう。従って、作問にあたっては児童生徒たちのより身近かな実用的な背景から素材を取る方がよいだろう。例えば、50円と100円のコイン；２種類の駄菓子；遠足で山を登りと降りるなどである。義務教育９年間で学ぶ算数や数学知識は９階建てのビルディングと見なすと、横軸の関連は疑うべくもないが、縦軸のつながりはビルディングにある階段・エレベーターによる。デザインによって、階段やエレベーターは直進式かスパイラル的か、多様なフォームになる。鶴亀算という繋ぎの提案は「数と式」のわずかな小さい隅を触っているにすぎないか。今後、４つの領域における繋ぎのカギを分析し、問題作りだけではなく、カリキュラム開発の角度から深く検討したい。

引用・参考文献

Ingraham, C. L. (1988) Self-esteem, crisis, and school performance. In J. Sandoval (Ed.), *Crisis counseling, intervention, and prevention in the Schools*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 21-33.

文部科学省初等中等教育局児童生徒課 (2011) 平成22年度「児童生徒の問題行動等生徒指導上の諸問題に関する調査」について，文部科学省

児島邦宏・佐野金吾 (2006) 中１ギャップの克服プログラム，明治図書

小泉令三 (2010) 中１ギャップとは何か：環境移行の観点から，教育と医学，第58巻３号

文部科学省(2008)中学校学習指導要領解説数学編，http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2011/01/05/1234912_004.pdf

黒木哲徳 (2009) 入門算数学，日本評論社，222-227

趙雪梅 (2010) 高校入試からみる数学的能力の養成，日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集，391-396

岡本和夫・小関熙純・森杉馨・佐々木武他 (2006) 楽しさひろがる数学２，啓林館

清水静海・船越俊介他 (2009) わくわく算数６上，啓林館

Abstract

Recently, the gap between elementary school and junior high school has attracted attention across educational society, and research in the analysis of factors and the method of bridging the gap has been developed gradually. The purpose of this paper is to find out a way to bridge the gap between arithmetic and algebra, since the advancement in mathematics throws some students off balance and make them confused. After the key between arithmetic in Grade 6 and algebra in Grade 1 is analysed, the model of Tusrukamezan is presented to be an example as how to link the study of arithmetic and algebra. The implications of this case are then discussed.