

数 学 (I 期)

以下の問題について解答せよ。解答欄に計算式等も記すこと。

1. 次の①～③の問いに答えよ。(36点)

- ① n を任意の整数とすると、 $n^3 - n$ は必ず6の倍数となることを証明せよ。
- ② $\frac{1}{2^{10}}$ を小数で表したとき、0以外の数が初めて現れるのは小数第何位か求めよ。
- ③ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$ で、 $\sin(\alpha + \beta) = 1$ を満たすとき、 $\alpha\beta$ の値が最大となる α, β を求めよ。ただし、 $\alpha\beta$ の値については、単位を考慮しないものとする。

2. 無理数に関する次の問いに答えよ。(16点)

- ① $3 - \sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ。
- ② 無理数と無理数を加えた数は、必ずしも無理数とはならないことを証明せよ。

3. 次の①及び②の問いに答えよ。(16点)

- ① $y = |3x - 4| - a$ のグラフを描け。ただし $a > 0$ とする。
- ② ①のグラフと x 軸で囲まれる三角形の面積を、 a を用いて表せ。

4. 2次方程式 $x^2 + 2ax + b = 0$ に関する次の問いに答えよ。(16点)

- ① $0 < x < 4$ の範囲に異なる2つの解を持つための、 a, b の満たすべき必要十分条件を求めよ。
- ② ①の条件の下で、2つの解がともに整数となる a, b の組をすべて求めよ。

5. Aさん、Bさん、Cさんの3人でじゃんけんを3回する。以下で、Aさんが勝つとは、Aさんだけが勝つ場合も、Aさん以外にも勝つ人がいる場合も含まれるものとする。次の①～③の問いに答えよ。(16点)

- ① Aさんが3回続けて勝つ確率を求めよ。
- ② Aさんが1回も勝てない確率を求めよ。
- ③ 3回のうち1回だけが全員が異なるものを出してあいこになる確率を求めよ。